وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية الاساسية

مجلة ميسان للدراسات الاكاديمية

العلوم الانسانية والاجتماعية والتطبيقية

ISSN (Paper)- 1994-697X
(Online)- 2706-722X

المجلد (23) العدد (50) حزيران (2024)

مجلة ميسان للدراسات الاكاديمية

العلوم الانسانية والاجتماعية والتطبيقية

كلية التربية الاساسية - جامعة ميسان - العراق

ISSN (Paper)-1994-697X
(Online)-2706-722X

المجلد (23) العدد (50) حزيران (2024)

www.misan-jas.com

journal.m.academy@uomisan.edu.iq

رقم الايداع في دار الكتب والوثائق بغداد 1326 في 2009

الصفحة	فهرس البحوث	ت
14 - 1	**Detection of Exoenzyme Effectors and Determination The MIC of Antibiotics for Pseudomonas Aeruginosa Isolated from Ear Infections Patients in Basrah Province, Iraq** Ayad Abdulhadi Waham Lina A. Naser	**1**
25 - 15	**Effect of Addition Zirconia/Chitosan Filler on Mechanical Properties of Heat Cure Polymethyl Methacrylate Resin** Shahad Lateef Mohammed Firas Abdulameer Farhan	**2**
33 - 26	**A Case :The Politicization of Love in American Poet Laureates Inaugural Poems Study of Amanda Gorman and Maya Angelou** Hussein Mezher Jasim	**3**
46 - 34	**Analytical Study in Gynecology: Designing Treatments for Polycystic Ovary Syndrome** Otoor Hassoon Abdulameer Raghad S. Shamsah	**4**
60 - 47	**African Development in the New Millennium: Going Beyond the "Good Governance" Debate** Oluseyi Elijah AKINBODE Bimbo Ogunbanjo	**5**
91 - 61	**Environmental Foreign Policy and Diplomacy in an Unequal World** Bimbo OGUNBANJO	**6**
101 - 92	**Dysfunctional American Family and Spiritual Decay in Edward Albee's Me, Myself and I** Habeeb Lateef Kadhim AL-Qassab	**7**
113 - 102	**The relationship of salivary cortisol and Volatile Sulfur Compounds with Halitosis among pregnant woman** Mareim Radhi Abd Al Nabby Abbas Almizraqchi	**8**
125 - 114	**Microbiota Revelations: First-time Prevotella spp. Identification in Iraq Pediatric Autism** Aladien Aurebi Muhawi Yasin Yacoup Yousif. Al-Luaibi	**9**
142 - 126	**Effect of Electronic Cigarette on Oral Health** Haneen A. alyaseen Zainab A. Aldhaher	**10**
157 - 143	**A Narrative Stylistic Analysis of (Voice) in Doris Lessing's "An Old Woman and her Cat" in Terms of Gerard Genette's Model** Narjis Abdul-Kareem Majeed Hameed Jassim	**11**
167 - 158	**The Role of Erythritol/Glycine Air Polishing Powder In Non-Surgical Periodontal** Mohammed Khalid Ayoob Hayder Raad Abdulbaqi	**12**
176 - 168	**cytological and cytomorphological comparative study of oral mucosa in diabetes mellitus and nondiabetics in Misan Governorate.** Noor Saeed Aneed Ali Khalaf Ali Maitham Abdel Kazem Daragh	**13**
194 - 177	**اشكالية الانطواء لدى يهود امريكا رواية "حتى الأزمة" للكاتب شمعون هالكين ((أنموذجا))** عمار محمد حطاب	**14**
208 - 195	**قياس تركيز ^{222}Rn و^{226}Ra في مجموعة من عينات المخلفات النفطية(Oil sludge) من بعض حقول نفط ميسان باستخدام كواشف الأثر النووي (CR-39)** مرتضى محمد عطية	**15**
221 - 209	**دور الشفافية في مكافحة الفساد الإداري في تعزيز حقوق المواطن العراقي** محسن قدير محمد نور الدين ماجدي	**16**

17	**الآثار التربوية للمعاد** اياد نعيم مجيد	231 - 222
18	**الأنزياحات الرمزية في شعر ماجد الحسن** نائل عبد الحسين عبد السيد	244 - 232
19	**التحرش الجنسي وحكمه الفقهي** **(دراسة نقدية للمواد القانونية ذات العلاقة في القانون العراقي)** فلاح عبد الحسن هاشم	266 - 245
20	**الشمول التشريعي بين النفي والإثبات** أياد عبد الحسين مهدي المنصوري	283 - 267
21	**دور البرامج الحوارية في فضائيات الاحزاب الاسلامية بترتيب اولويات الجمهور العراقي ازاء القضايا الوطنية** حسين امير عباس عادل عبد الرزاق مصطاف	299 - 284
22	**العلاقات الدلالية في تفسير مَعَارِجُ التفكُّر ودقائقُ التدبُّر لعبد الرحمن الميداني (1425ه)** مصطفى صباح مهودر انجيرس طعمة يوسف	312 - 300
23	**دور النمذجة في أدراك المتعلمين البصري لأساسيات المنظور في مادة التربية الفني** حسين رشك خضير	326 - 313
24	**فاعلية استراتيجية الرؤوس المرقمة في تحسين الدافعية لدى تلاميذ الصف الخامس الابتدائي في مادة اللغة الإنكليزية** منى عبد الحسين حصود فاطمة رحيم عبد الحسين	346 - 327
25	**دور المدقق الخارجي في تقليلِ مخاطِر العرض الالكترونيَ للتقاريرِ المالية** محسن هاشم كرم النوري	360 - 347
26	**صفات المنهج التربوي في القرآن وآليات تحققه دراسة تحليليّة تفسيريّة** أحمد نذير يحيى مزيداوي	377 - 361
27	**طقوس الدفن في بلاد الأناضول وأسلوب فصل الجماجم في العصر الحجري الحديث** سارة سعيد عبد الرضا فاضل كاظم حنون	393 - 378
28	**معالم القصة القرآنية ومعطياتها** **حيدر كريم عودة**	407 – 394
29	**تأثير التفكير المنهجي المنظومي لمادة الأحياء لطلبة المرحلة الاعدادية استنادا الى استراتيجية PLAN** رجاء جاسم هاتف	423 - 408
30	**الفضاءات المترية الجزئية ومفهوم النقطة الثابتة** بشرى حسين سيد	442 - 424
31	**المقاربة الطبيعية للغة** على عبد الكاظم حميد ضمير لفتة حسين	451 - 443

Misan Journal for Academic studies
Vol 23 Issue 50 June 2024
مجلة ميسان للدراسات الاكاديمية
مجلد 23 العدد 50 حزيران 2024

ISSN (Paper) 1994-697X

ISSN (Online) 2706-722X

DOI: https://doi.org/10.54633/2333-023-050-030

الفضاءات المترية الجزئية ومفهوم النقطة الثابتة

بشرى حسين سيد
جامعة ميسان – كلية التربية الأساسية

المستخلص:

تشكل الفضاءات المترية عائلة فرعية من عائلة المساحات الطوبولوجية، أو بعض الفضاءات غير الفارغة المناسبة. النقطة الثابتة، دائما تقريباً، يمكن العثور عليها باستخدام تكرار Picard (تكرار النقطة الثابتة الأكثر استخداماً) إذ يمكن البدء من أي نقطة ابتدائية0− xفي الفضاء. إن إيجاد نقاط ثابتة للتعيينات يعتمد بشكل أساسي على إعدادات المساحات المدروسة التي يتم تعريفها باستخدام بعض المسلمات البديهية. فئات مختلفة من المساحات المعممة والعديد من الانكماشات سوف تسفر عن مجالات بحث ديناميكية جديدة وبالتالي أنواع مختلفة من تخمينات النقط الثابتة الموحدة دفعة واحدة. معظم الجهد الذي تم بذله على نظرية النقطة الثابتة كان موجه إلى تحديد مجموعة متنوعة من الشروط الكافية القابلة للتطبيق والتي يمكن التحقق منها بسهولة لمشكلات النقاط الثابتة. يتكون البحث من مجموعة متنوعة من المناقشات المتقدمة والموضوعات المعاصرة حول نظرية النقطة الثابتة المترية وتطبيقاتها لعرض جدوى النتائج. يحتوي إطار البحث بلا شك على الرياضيات النظرية البحتة. نحن نستكشف مزيجاً مثالياً من الشروط المريحة لإثبات ما لدينا نظريات جديدة وإنجاز الفكرة بالتفصيل الكامل لبرهان كافة النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام أنماط إثبات مختلفة وقابلة للتطبيق وعالية التقنية. نتائج هذا البحث نظرية وتحليلية بطبيعتها. هذه الدراسة تتبع الاتجاه الحديث وأحدث تطور في تحليل نظرية النقطة الثابتة المترية، ويقدم نصاً أساسياً سليماً جداً حول هذه النظرية. وهذا البحث جمعت به فصول ثلاثة مختارة عن المواضيع الحديثة لنظرية النقطة الثابتة وتطبيقاتها، كل منها مقسمة إلى عدة أقسام، مرقمة تدريجياً.

الكلمات المفتاحية: فضاء متري، مبهم، حدودي، بعد صفري، بعد استقرائي.

Submetric metric spaces and the fixed point concept

Boshara Hussein Sayed
University of Misan - College of Basic Education
bosharahussein@gmail.com
:https://orcid.org/0009-0003-3953-6558

Abstract:

Metric spaces form a subfamily of topological spaces, or some appropriate non-empty spaces. The fixed point can, almost always, be found using the Picard iteration (the most widely used fixed point iteration), as one can start from any initial point 0-x in space. Finding fixed points for mappings depends mainly on the settings of the studied spaces, which are defined using some intuitive axioms. Different classes of generalized spaces and several contractions will yield new dynamic research areas and thus different types of uniform fixed point conjectures at once. Most of the effort expended on fixed point theory has been directed at specifying a variety of applicable and easily verifiable sufficient conditions for fixed point problems.

The paper consists of a variety of advanced discussions and contemporary topics on metric fixed point theory and its applications to present the feasibility of the results. The research framework undoubtedly contains pure theoretical mathematics. We explore the ideal combination of relaxed conditions to prove our new theorems and realization of the idea in full detail to prove all the results obtained using different, applicable and high-tech proof modes. The results of this research are theoretical and analytical in nature. This study follows the recent trend and latest development in the analysis of metric fixed point theory, and provides a very sound basic text on this theory. This research brings together selected chapters on modern topics of fixed point theory and its applications, each of which is divided into several sections, numbered gradually.
Keywords: metric space, fuzzy, parametric, zero dimension, inductive dimension.

المقدمة:

يمثل الفضاء المتري فرعاً هاماً من عائلة المساحات الطوبولوجية فرغم حداثته الا انه نال اهتمام كثير من الناشطين في مجال الرياضيات، ومن اهم مواضيعه (المبادئ الاساسية في الفضاء المتري) وهذا ما تطرقنا اليه في بحثنا ولكن بشكل خاص في (الفضاءات المترية الجزئية ومفهوم النقطة الثابتة) فقد تم تسليط الضوء على مفهوم الفضاءات وبعض انواعها وطرح بعض المبرهنات والأمثلة وهذا تم على ثلاث مراحل:

تناولنا في الفصل الاول المبادئ الاساسية في الفضاء المتري وحدد فيه نظام الاعداد الحقيقية ولهذا النظام نوعان من الخواص خواص جبرية وخواص تتعلق بمفهوم البعد او (المسافة) وفي الفصل الثاني تطرقنا الى مفهوم الاستمرارية في الفضاء المتري ويعد من الدوال ذات الاهمية في دراسة الرياضيات وفي الفصل الاخير تطرقنا الى اهمية الفضاءات المترية الجزئية ومفهوم النقطة الثابتة ووضح فيه مفهوم مبرهنة بناخ الثابتة في الفضاءات المترية وتعد من اهم المبرهنات في التحليل الرياضي.

أهمية البحث:

اهتمت دراسة هذا البحث على مفهوم الفضاءات المترية والمفاهيم المرتبطة بها وعلى وجه الخصوص الخصائص المرتبطة بالمجموعات والتقارب مع امثلة توضيحية. و ناقشت ايضاً خصائص هذا الفضاء من اجل الحصول على خصائص فضاءات ذات طبيعة خاصة ومفهوم النقطة الثابتة وغيرها من الخصائص التي تلعب دور مهم في موضوع التحليل الرياضي والتطبيقات الفيزيائية والهندسية . وركزت هذه الدراسة على الفضاء المتري الذي يمثل الفضاء الأساسي في التحليل الدالي ومشابه لدور مجموعة الاعداد الحقيقية في حساب التفاضل والتكامل.

أهداف البحث:

1- التعرف على مفهوم الفضاء المتري .

2- التعرف التعرف على بعض النظريات والمبرهنات في هذا الموضوع.

3- التعرف على توبولوجيا الفضاءات المترية أهم التطبيقات على الفضاء المتري.

4- التعرف على تقارب المتتابعات والمتتابعات الكوشية في الفضاءات المترية.

مشكلة البحث:

من أهم المشاكل التي كان يواجهها الانسان حساب المسافة بين نقطتين (R,R^2)ليس هذا فحسب بل كان بداية المشكلة كحساب المسافة بين الشيفرات الجينية في علم الوراثة والمسافات بين الكلمات في علم الحاسوب وغيرها من العلوم . فبدأ ظهور ما يسمى بالفضاء المتري الذي توصل اليه العالم الفرنسي فريشية من خلال بحثه في عام 1906م .

1-هل الفضاء مجموعة مضمونة اي تعطي نتيجة؟

2-هل عند جمع متجه مع متجه سرعة يظهر الناتج متجه سرعة؟

3-هل عند جمع دالة ربح لمنتج معين مع منتج اخر يعطي دالة ربح ؟

اولاً– المبادئ الأساسية في الفضاء المتري:

نظام الأعداد الحقيقية ولاحظنا لهذا النظام نوعان من الخواص، النوع الأول من الخواص هي الخواص الجبرية وهي التي تتعلق بالجمع والطرح والضرب والقسمة واستخراج الجذور أما النوع الثاني من الخواص فهي التي تتعلق بمفهوم البعد (أو المسافة) بين عددين ومفهوم التقارب. يدعى هذا النوع من الخواص بالخواص التبولوجية أو الخواص المترية وموضوع التحليل الرياضي يتعلق بدراسة هذا النوع من الخواص، الغرض من هذا الفصل هو دراسة هذه الخواص وبالتالي دراسة التحليل في الفضاءات العامة التي يمكن أن يعرف فيها البعد أو المسافة.

تعريف(1 :1) يقال ان الزوج المرتب (x,d) فضاء متري إذا كانت x مجموعة غير خالية وله تطبيق من:

يستوفي الشروط التالية: $X \times X \longrightarrow R$

1) $d(x,y) \geq 0 \ \forall \ x, y, \in X$

2) $d(x,y) = 0 \quad x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall \ x, y \in X$

4) $d(x, y) \leq d(x, t) + d(t, y) \ \forall \ x, y \in X$

تسمى عناصر المجموعة X نقاط الفضاء ويسمى العدد d(x, y) البعد بين نقطتين x, y كما يسمى التطبيق d البعد أو المسافة. (Al Aloosi: 2024)

مثال (1:1):

لتكن (R, d) فضاء متري حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ولكل $x, y \in R$ و

$$d(x,y) = |x-y|$$

Sol: (d) سنحقق الشروط الأربعة للبعد

1) $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow |x-y| \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

3) $d(x,y) = |x-y| \Rightarrow |(-1)y-x| \Rightarrow d(y,x) \Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

4) $d(x,y) \leq d(x,t+t,y) \Rightarrow d(x,t)+d(t,y) \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,t)+d(t,y)$

$\therefore$ (R, d) فضاء متري ويسمى بالفضاء المتري الاعتيادي.

مثال (2:1) :

لتكن (x, d) فضاء متري

ولتكن: diXxX $\longrightarrow$ R

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 if x = y \\ 1 if x \neq y \end{cases}$$

فان الثنائي (x, d) فضاء متري، واضح جداً ان الشروط (1) و(2) و(3) متحققة يبقى أن نحقق الشرط (4) المتباينة المثلثية:

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

هنا سوف يكون لدينا ستة احتمالات:

1) $x \neq z \leq x \neq y + y \neq z$

2) $x \neq z \leq x = y + x \neq z$

3) $x \neq z \leq x \neq y + y = z$
4) $x = z \leq x \neq y + y \neq z$
5) $x = z \leq x = y + y \neq z$
6) $x = z \leq x \neq y + y = z$

$\therefore$ (x, d) فضاء متري يسمى بالفضاء المتري المتقطع

(AlAni: 2012)

مثال :

ليكن $IR^n = X$

حيث $IR^n = [(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)] \; \forall \, x_i \in R$

$x = (x_1, x_2, \ldots.., x_n) \in R^n$
$y = (y_1, y_2, \ldots\ldots.., y_n) \in IR^n$

فنعرف:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots\ldots.. + (x_n - y_n)^2}$$

علينا أن نبين ان (d) هي البعد على IR^n من الواضح ان تحقق الشروط (1) و(2) و(3) في تعريف البعد ولأجل أن نبين ان (d) تحقق الشرط (4) نعطي المتراجحات التالية:

(متراجحة كوشي – شوارز)

لأي مجموعة من الأعداد الحقيقية يكون:

$b_n, \ldots\ldots, b_2, b_1, a_n, \ldots\ldots.., a_2, a_1$

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots.. + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots\ldots\ldots a_n^2} . \sqrt{b_1^2 + \ldots\ldots.. + b_n^2}$$

(متراجحة فنكوفسكي)

لأي مجموعة من الأعداد الحقيقية يكون:

$b_n, \ldots\ldots, b_2, b_1, a_n, \ldots\ldots.., a_2, a_1$

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \ldots\ldots.. + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots\ldots.. + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots\ldots\ldots + b_n^2}$$

مثال (3:1) :

ليكن

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$d : R^2 x R^2 \to R$$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

واضح جداً ان الشروط (1) و(2) و(3) متحققة، يبقى أن نحقق الشرط (4) باستخدام متراجحة فنكوفسكي:

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - z_1 + z_1 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - z_2 + z_2 - y_2)^2}$$

$$\leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_2 - y_2)^2}$$

$$d(x,z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} + \sqrt{(x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2} + \sqrt{(z_2 - y_2)^2} \Rightarrow d(z,y)$$

$$\therefore d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$\therefore$ (R^2, d) فضاء متري

(Andrzej Granas and James Dugundji, 2003)

تبولوجيا الفضاء المتري:

ليكن (x, d) فضاء متري ولتكن $x_\circ \in x$ إذا كان $r \in R^+$ فان المجموعة التالية:

$$B_r(x_\circ) = \{x \in x | d(x, x_\circ| < r\}$$

تسمى بالكرة حيث ان $x_\circ$ مركز الكرة وr نصف قطر الكرة وبالتالي لو كان لدينا الفضاء المتري الاعتيادي أي أن:

$$d(x, y) = |x - y| \forall x, y \in X$$

فان تعريف الكرة يكون بالشكل التالي:

$$B_r(x_\circ) = \{x \in X | d(x, x_\circ| < r\}$$

$$B_r(x_\circ) = \{x \in X | (x - x_\circ| < r\}$$

$$B_r(x_\circ) = \{x \in X | (-r < x - x_\circ| < r\}$$

$$B_r(x_\circ) = \{x \in X | (x_\circ - r < x < x_\circ| + r\}$$

$$B_r(x_\circ) = (x_\circ - r, x_\circ + r)$$

نستنتج من أعلاه ان كل كرة هي فترة مفتوحة والعكس صحيح، نأخذ المثال التالي في الفضاء المتري الاعتيادي:

$$B_{\frac{1}{2}}(2) = \left\{x \in R | d(x, z) < \frac{1}{2}\right\}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(2) = \left\{x \in |R| x - 2| < \frac{1}{2}\right\}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(2) = \left\{x \in R \middle| \frac{-1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2}\right\}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(2) = \left\{x \in R \middle| 2 - \frac{1}{2} < x < 2 + \frac{1}{2}\right\}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(2) = \left\{x \in R \middle| \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\right\}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

تعريف(2:1) : ليكن x فضاء متري $\phi \neq s \leq X$ يقال ان المجموعة s مفتوحة إذا كان لكل $x \in s$ يوجد $r>0$ بحيث أن:

(Andrzej Granas and James Dugundji, 2003)

$$B_r(x_\circ) < s$$

بالتالي فان s مفتوحة إذا وفقط إذا استطعنا أن نجد كرة لكل عنصر من عناصر s وتكون مجموعة جزئية من s.

ملاحظة : (Gajic, L: 2001)

إذا كان x فضاء متري وT عائلة مجموعات مفتوحة في x فان:

a) كل من Φ وx تنتمي إلى T.

b) اتحاد أي عدد منتهي أو غير منتهي في المجاميع المفتوحة في x يكون مجموعة مفتوحة.

Misan Journal for Academic studies مجلة ميسان للدراسات الاكاديمية
Vol 23 Issue 50 June 2024 مجلد 23 العدد 50 حزيران 2024

c) تقاطع أي عدد منتهي من المجاميع المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

مثال$(3-1)$:

الفترة المفتوحة (a,b) في الفضاء المتري الحقيقي الاعتيادي استناداً إلى التعريف أعلاه هي مجموعة مفتوحة وذلك لأننا نستطيع إيجاد كرة لكل نقطة من نقاط (a, b) بحيث تكون هذه الكرة مجموعة جزئية من (a, b).

تعريف$(1:9)$ [1]: إذا كان X فضاء متري و$E\subseteq X$ تسمى E مجموعة مغلقة إذا كانت متممة المجموعة E مفتوحة، أي ان $X/E = s$ مجموعة مفتوحة والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال $(4-1)$: (Gajic, L: 2001)

الفترة المغلقة [a, b] مجموعة مغلقة في الفضاء المتري الاعتيادي استناداً إلى التعريف أعلاه فأن:

$$(-\infty,a)\cup(b,\infty)=X/[a,b]$$

وبما ان كل فترة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة استناداً إلى الملاحظة (1.b) اتحاد أي عدد منتهي من المجاميع المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة فان X/[a, b] مفتوحة وبالتالي فان E مغلقة. (Kishore: 2008)

مثال$(5-1)$: الفترة (a, b) مجموعة غير مغلقة لكون :

$$X(a,b)=(-\infty,a)\cup(b,\infty)=X/[a,b]$$

المتتابعات في الفضاء المتري:

إذا كانت S مجموعة غير خالية و N مجموعة الأعداد الطبيعية .

حيث: $N=\{1,2,\ldots.\}$ فكل تطبيق S $f{:}N$ يسمى ⟶ متتابعة أي ان لكل $n\in N$

يوجد $X_n\in S$ بحيث أن:

$f(n) = X_n$

ويرمز للمتابعة بالرمز $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ إذا كانت غير منتهية وإذا كانت منتهية فان $[X_n]_{n=1}^{100}$

المجموعة $[X_n | n\in N]$ تسمى مدى المتتابعة وواضح جداً ان المدى مجموعة جزئية من المتتابعة.

أمثلة$(6-1)$: (Ramadan: 2013)

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\ldots\ldots\right\}$

2) $\left\{\frac{1}{2^2}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\ldots\ldots\right\}$

3) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}=\{-1,1,-1,1,\ldots\ldots\ldots\}$

4) $\{2n\}_{n=1}^{\infty}=\{2,4,6,\ldots\ldots\ldots\}$

تقارب المتتابعات في الفضاء المتري:

تعريف: ليكن (x, d) فضاء متري ولتكن $[x_n]$ متتابعة، يقال إن $[x_n]$ متقاربة إلى النقطة $x\in X$ إذا تحقق الشرط التالي:
(Masiha: 2013)

$$\forall\varepsilon>0\exists K\in N\ni d(x_n,x)<\in\forall n>k$$

ويرمز لتقارب المتتابعة بالرمز :

$$\lim X_n = X$$

بمعنى ان المتتابعة $\{X_n\}$ تكون متقاربة في الفضاء المتري إذا كانت كل كرة مركزها $x_\circ$ تحوي على معظم حدود المتتابعة ماعدا عدد منتهي وليكن k.

تعريف(3-1): المتتابعة $[X_n]$ في الفضاء المتري (x, d) تكون مقيدة إذا وجد عدد حقيقي $M \in R$ بحيث أن:

$$d(x_n, x) < M, \forall x \in x$$

هذا يعني لو كان لدينا الفضاء المتري الاعتيادي (R, d) فان المتتابعة $\{X_n\}$ تكون مقيدة بالشكل التالي:

$$|x_n - x| < M$$

$$-M < x_n - x < M$$

$$X - M < x_n < x + M \forall n \in N$$

(Vasile I. Istratescu: 1981)

حيث أن:

X + M القيد الأعلى للمتتابعة

X – M القيد الأسفل للمتتابعة

ملاحظة (1: 4) :

a) إذا كانت المتتابعة $\{X_n\}$ في (x, d) متقاربة فان نقطة تقاربها وحيدة.

b) كل متتابعة متقاربة في الفضاء المتري (x, d) تكون مقيدة.

المتتابعات الكوشية في الفضاء المتري (الفضاءات المترية الكاملة):

تعريف(1: 5) : لتكن $\{X_n\}$ متتابعة في الفضاء المتري إذا تحقق الشرط التالي:

$$[\forall \in > 0] K \in N d(x_n, x_m) < \in \forall n, m > k$$

(Filomat: 2013)

من التعريف أعلاه نستنتج التالي:

1) كل متتابعة متقاربة في (x, d) متتابعة كوشيه والعكس يكون صحيح فقط في الأعداد الحقيقية (الفضاء المتري الاعتيادي) أي إذا كانت X = Q فانها متتابعة كوشيه ولكنها لا تقترب إلى نقطة تنتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية.

2) كل فضاء متري تحقق فيه كل متتابعة كوشيه متقاربة تسمى بالفضاء التام، بالتالي فان (R, d) فضاء متري تام.

مثال (1: 5) : لتكن$\{0\}$ /X = R ولتكن d دالة الفضاء المتري الاعتيادي

$d(x, y) = |x - y|$ لكل $x, y \in X$

∴ **المتتابعة** $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشيه ولكنها غير متقاربة لكون نقطة تقاربها $0 \notin R/[0]$ بالتالي فان $R/\ \{0\}$ فضاء غير كامل. (William,R.and Philip, 1987)

ثانياً– الاستمرارية في الفضاء المتري:

مفهوم الاستمرارية يميز صنفاً من الدوال ذا أهمية خاصة ليست فقط في دراسة الرياضيات نفسها بل حتى في الاستخدامات العديدة في الرياضيات، حيث ان هذا الصنف من الدوال يلعب دوراً مهماً في الهندسة والفيزياء سنعطي في هذا الفصل تعاريف الاستمرارية في الفضاء المتري ومفهوم النقطة الثابتة في الفضاءات المترية والعلاقة بين المفهومين.

تعريف(2: 1): ليكن (x, d) و (x^-, d^-) فضاء متري يقال ان التطبيق:

$f: (x, d) \rightarrow (x^-, d^-)$ تطبيقاً مستمراً في النقطة $x_\circ \in x$ إذا كان لكل:

$\in > 0$ يوجد $S > 0$

حيث: إذا كانت لكل $x \in x$ بحيث انه إذا كانت $d(x, x_\circ) < S$ فان

$d^-(f(x), f(x_\circ)) < \in$ أي ان f تكون مستمرة في $x_\circ$

إذا كانت لكل كرة $B_\in(f(x_\circ))$ يوجد كرة مركزها $x_\circ$ ونصف قطرها S $B_S(x_\circ)$

حيث أن:

$$f(B_S(x_\circ)) \subseteq B_\in(f(x_\circ))$$ (Naom: 1986)

المبرهنة التالية تعطي وصفاً آخر للتطبيقات المستمرة:

مبرهنة **(2: 2)**:

ليكن (x, d) و (x^-, d^-) فضاء متري ولتكن $f: x \rightarrow x^-$ فان f تكون مستمرة إذا وفقط إذا كان: $f^{-1}(v) \subset X$ لكل V مجموعة مفتوحة في X حيث أن:

$$f^{-1}(V) = \{x \in x | f(x) \in V\}$$

المبرهنة التالية تستخدم المجاميع المغلقة لبرهنة أي تطبيق f بأنه مستمر.

مبرهنة **(2: 3)** : (Filomat: 2013)

المبرهنة التالية توضح العلاقة بين مفهومي التقارب والاستمرارية في الفضاء المتري.

مبرهنة **(2: 4)** :

ليكن (x, d) و (x^-, d^-) فضاء متري ولتكن $f: x \rightarrow x^-$ ولتكن $x_\circ \in x$ يكون التطبيق f مستمراً في $x_\circ$ إذا كانت لكل $\{x_n\}$ متقاربة إلى $x_\circ$ في x تكون المتتابعة $\{f(x_n)\}$ متقاربة إلى $f(x_\circ)$ في x^-.

وبصورة مختصرة فان:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

<u>**البرهان:**</u> نفرض ان f تطبيق مستمر في $x_\circ \in x$ ونفرض أن $\{x_n\}$ متتابعة في x بحيث أن $x_n \rightarrow x_\circ$ المطلوب برهان : $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

نفرض أن f تطبيق مستمر في $x_\circ \in x$ ونفرض ام $\{x_n\}$ متقاربة إلى $x_\circ$

لتكن V مجموعة مفتوحة في x^- تحتوى على $f(x_\circ)$

بما ان التطبيق مستمر فأن $f^{-1}(V) \subset X$

وبما ان $x_n \rightarrow x_\circ$ هذا يعني ان المجموعة $f^{-1}(V)$ تحتوي على معظم حدود المتتابعة $\{x_n\}$

بالتالي فأن $f(x_n)$ و $f(x_\circ)$

$\therefore$ f تطبيق مستمر

مثال (2: 5): إذا كان $f: R \longrightarrow R$ و $f(x) = x^2$ لكل $x \in R$ فأن f مستمر

لكون إذا $x_\circ \in R$ بحيث أن: $|x - x_\circ| < S$ لكل $x \in R$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_\circ)| = |x^2 - x_\circ^2|$$

$$= |x - x_\circ||x + x_\circ|$$

$$< S|x + x_\circ|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_\circ)| < S|x + x_\circ| > 0$$

$$\Rightarrow \because |x + x_\circ| > 0, S > 0$$

$$\Rightarrow t = |x + x_\circ|S > 0$$

$$\therefore |f(x) - f(x_\circ)| < \in$$

$\therefore f$ دالة مستمرة

(William A. Kirk and Brailey Sims,2012)

مثال (2: 6) : (Vasile I. Istratescu, 1981)

لتكن $f: R^+ \longrightarrow R$

معرفة بالشكل: $f(x) = \frac{1}{x}$ لكل $X \in R^+$

ولتكن: $z \qquad x \longrightarrow$ بحيث أن $S>0$ و $|x - z| < S$

$$|f(x) - f(z)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right|$$

$$= \frac{|x - z|}{zx} < \frac{|x - z|}{z}$$

$$< \frac{S}{2}$$ $S>0$ و $z>0$ و

$$\Rightarrow \in = \frac{S}{2} > 0$$

$$\therefore |f(x) - f(z)| < \in$$

$\therefore$ f دالة مستمرة عند z

مبرهنات النقطة الثابتة في الفضاء المتري: (Ramadan: 2013)

نظرية النقطة الثابتة تستخدم في الكثير من فروع الرياضيات وتطبيقاتها. في هذا البند سنعطي بعض المفاهيم الأساسية لهذه النظرية في الفضاء المتري.

تعريف(2: 7) : إذا كانت x مجموعة غير خالية و $f: x \longrightarrow x$ دالة النقطة الثابتة للدالة f هي $x \in x$ حيث ان $f(x)$ = x وبعبارة أخرى النقطة الثابتة هي حل المعادلة $f(x)$ لكل $x \in x \longrightarrow$ نقطة ثابتة.

تعريف(2: 8) : ليكن (x, d) فضاءً مترياً و $x \longrightarrow f: x$ دالة، فنقول عن f انه تقليص (contraction)

إذا وفقط إذا وجد ثابت مثل k يحقق الشرط $0<k<1$ بحيث يكون:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \le kd(x,y) \text{ لكل } x, y \in x$$

وهذا يعني هندسياً ان لأي نقطتين x, y صورتين أقرب أحدهما إلى الآخر من قرب النقطتين x, y من بعضهما.

ملاحظة (2: 9) : (Naom: 1986)

a) لتكن D مجموعة مغلقة في R^n فأن $S: D \longrightarrow D$ تقليص على D إذا كان:

$$d\big(S(x), S(y)\big) \le Cd(x,y) \text{ لكل } 0<C<1,\ x,y \in D$$

b) إذا كان $d(S(x), S(y)) = cd(x, y)$ فان S ينقل المجموعات إلى أخرى متشابهة هندسياً ويسمى S عند تشابهاً أو تحويل تشابه ذا المشتبه C.

أما إذا كان $C = 1$ فان $d(S(x), S(y)) = d(x, y)$ ويمكن أن يسمى S عندها تقايساً.

مبرهنة(2: 10): (Filomat: 2013)

(كل دالة تقليص على الفضاء المتري x تكون مستمرة).

البرهان: لتكن $x \longrightarrow f: x$ تقليصاً

وتفرض $x_n \longrightarrow x$ عندئذ

$$d\big(f(x_n), f(x)\big) \le kd(x_n, x) \text{ ومنه } f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

مبرهنة (2: 11) : (مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة)

ليكن (x, d) فضاءً مترياً تاماً و $x \longrightarrow f: x$ تقليص فان الدالة f تمتلك نقطة ثابتة وحيدة.

أي توجد نقطة واحدة فقط x من x بحيث ان $f(x) = x$

البرهان:

لنأخذ أي نقطة $x_\circ$ من x ونفرض الدالة f بالشكل $f(x_n) = x_n + 1$ لكل $n \ge 0$ الآن لنبرهن ان $\{x_n\}$ كوشيه:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \\
&\le kd(x_n, x_{n-1}) = kd\big(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})\big) \\
&\le k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) = k^2 d\big(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})\big) \\
&\le k^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \le \dots\dots \le k^n d(x_1, x_\circ)
\end{aligned}$$

الآن لنفرض ان m > n نحصل على:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{n-1}, x_{m-2}) + \dots\dots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&= k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \big(d(x_1, x_\circ)\big)
\end{aligned}$$

$$d(x_m,x_n)\le\left(k^n\sum_{i=0}^{m-n-1}k_i\right)d(x_1,x_\circ)$$

$$\Rightarrow d(x_m,x_n)\le\frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_\circ)$$

$\because$ $0<k<1$ فان الطرف الأيمن صفر إذا كانت n و m كبيرتين بالتالي فان $\{x_n\}$ كوشيه في الفضاء المتري x.

وبما ان x فضاء متري تام(كل متتابعة كوشيه تكون متقاربة)

هذا يعني ان $x_n \longrightarrow x$ ومنه $x_{n+1} \longrightarrow x$ فان أيضاً

وبما ان f دالة مستمرة هذا يعني ان $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

وبما ان الدالة $f(x_n) = x_{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1})$$

$f(x) = x$

$\therefore$ x نقطة ثابتة في الفضاء المتري X

لإثبات وحدانية النقطة الثابتة نفرض ان x, y نقطتان ثابتتان في x لـf وفيه

$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$

وبما ان $k < 1$ فان $d(x, y) = 0$ وبالتالي فان $x = y$

مثال(**2: 12**) : بين ان المعادلة $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ جذراً واحداً فقط في $[0, 1]$.

الحل: لنضع $x = [0, 1]$ ونزوده بالفضاء المتري الاعتيادي نظراً إلى أن $[0, 1]$ مجموعة مغلقة في R فإنها تامة

$f(x)=\frac{1}{7}\left(x^3+x^2+1\right)$ لكل $x \in x$

$f(x)$ معرفة لكل $x \in x$ على $[0, 1]$

$$f(x)\le\frac{1}{7}(1+1+1)=\frac{3}{7}<1$$

بالتالي فأن $f(x) \in x$

وحسب المبرهنة (**2: 2**) فان f تمتلك نقطة ثابتة :

أي انه يوجد $x\in [0, 1]$ حيث ان هذا الـx وحيد بحيث $x=f(x)=\frac{1}{7}\left(x^3+x^2+1\right)$ أي انه يوجد x وحيد من $[0, 1]$ بحيث $x^3 + x^2 - 7x + 1$

مثال (**2: 13**) :

ليكن $f: [1, \infty] \longrightarrow [1, \infty]$ دالة معرفة بالقاعدة

$$f(x)=\frac{25}{26}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

اثبت ان f تقليص وان d نقطة ثابتة وحيدة.

الحل: لكل$[1, \infty[$ $x, y \in$ فأن

$$|f(x)-f(y)|=\frac{25}{26}\left|x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$$

$$|f(x)-f(y)|=\frac{25}{26}\left|-\frac{1}{xy}\right||x-y|\le\frac{25}{26}|x-y|$$

$\because 1 > \frac{25}{26}$ فأن f تقليص، وبما ان $[1, \infty[$ مغلقة في R فأنها تامة بالتالي فان f تمتلك نقطة ثابتة.

ملاحظة: إذا كان

$$x=f(x)=\frac{25}{26}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

فأن :

$\frac{26}{25}x-x=\frac{1}{x}$ ومنه $x^2 = 25$ أي $x = \pm 5$

$\because$ $[1, \infty]$ $x \in$ فان $x = 5$

ثالثاً- الفضاءات المترية الجزئية ومفهوم النقطة الثابتة :

تعتبر مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة في الفضاءات المترية من أهم المبرهنات في التحليل الرياضي، حيث انها من المصادر المهمة في نظرية النقطة الثابتة وطبقت في الكثير من فروع الرياضيات.

في هذا الفصل سنحاول تعميم هذه المبرهنة في نوع جديد من الفضاءات المترية تسمى بالفضاءات المترية الجزئية.

1- الفضاءات المترية الجزئية:

تعريف (3: 1): لتكن X مجموعة غير خالية، الدالة $P: xxx \longrightarrow R+$ تشكل فضاء متري جزئي على المجموعة X، إذا حققت الشروط التالية: (Al Aloosi :2024)

1- $x = y \longleftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$

2- $p(x,x) \le p(x,y)$

3- $p(x,y) = p(y,x)$

4- $p(x,y) \le p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

الثنائي (x,p) يسمى الفضاء المتري الجزئي، حيث ان x مجموعة غير خالية، p دالة مترية جزئية على x.

المثال النموذجي لهذا الفضاء، عندما تكون الدالة p معرفة بالشكل التالي:

$x,y \in R+$ لكل $p(x,y) = \max(x,y)$ حيث ان $P: R+xR+ \longrightarrow R+$

ملاحظة(3 :2) : إذا كان p فضاء متري جزئي على x فان الدالة:

$Ps: XxX \longrightarrow R+$ المعرفة بالشكل:

$$Ps(x,y) = 3P(x,y) - P(x,x) - P(y,y)$$

تكون فضاء متري اعتيادي على x.

تعريف(3: 3) : ليكون (x, p) فضاء متري جزئي فالمتتابعة {Xn} تكون متقاربة إلى $x \in X$ إذا وفقط إذا $\lim P\{x,xn\} = P(x,c)$. (Vasile I. Istratescu, 1981)

تعريف(4:3) : ليكن (x,p) فضاء متري جزئي فالمتتابعة{Xn} تكون متتابعة كوشيه إذا وفقط إذا كانت:
$\lim_{n \to \infty,\, m \to \infty} P\{xn,xm\}$ موجودة.

تعريف(5:3) : الدالة $F: X \longrightarrow X$ تكون مستمرة عند النقطة $x^\circ \in x$ إذا كان لكل $\in>0$ يوجد $s>0$ بحيث أن:

$$F(Bp(x^\circ,s) \le Bp(F(x^\circ,\in))$$

ملاحظة(3: 6) : إذا كان (x,p) الفضاء المتري الجزئي فان: (Filomat: 2013)

(1) [xn] متتابعة كوشيه في (x,p) إذا وفقط إذا كانت{xn} متتابعة كوشيه في (x,ps).

(2) الفضاء المتري الجزئي (x,p) يكون تام إذا وفقط إذا كان الفضاء المتري (x,ps) تام.

(3) $\lim_{n \to \infty} Ps\,(xn,x) = 0$ إذا وفقط إذا

$$P(x,x) = \lim_{n \to \infty} P(xn,x) = \lim_{m \to \infty} P(xn,xm)$$

2- مبرهنات النقطة الثابتة في الفضاءات المترية الجزئية:

تعريف(3: 7) : لتكن $\varnothing: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ دالة تحقق الشروط التالية:

(1) $\varnothing(0) = 0$ و $\varnothing(t)>0$ لكل $t>0$.

(2) $\varnothing$ دالة شبه مستمرة من جهة اليمين، بمعنى لأي متتابعة موجبة غير متزايدة [rn}،

إذا كان $\lim (\inf(\varnothing(rn)) \ge \varnothing(r)$ فان $\lim r_n = r$.

(3) لأي متتابعة{rn} حيث ان $\lim_{n \to \infty} rn = 0$ فانه يوجد $a \in (0,1)$ و $n^\circ \in N$ بحيث أن $\varnothing(rn) \ge arn$ لكل $n \ge n^\circ$.

مبرهنة(3: 8) : لتكن $(x,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً وليكن p دالة مترية جزئية على x بحيث أن (x,p) فضاء متري جزئي تام، ولتكن $T: x \to x$ دالة مستمرة غير متناقصة بحيث أن:

$$P(T(x), T(y)) \le P(x,y) - \varnothing(P(x,y)) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

لكل $x,y \in x$ حيث $\to$ أن x,y عنصران قابلين للمقارنة (أما $x \le y$ أو $y \le x$) و $\varnothing \in \psi$، إذا وجد $x^\circ \in x$ بحيث أن $x^\circ \le T(x^\circ)$ فانه يوجد $x \in X$ بحيث أن $T(x) = x$ أكثر من ذلك فان $P(x,x) = 0$.

البرهان:

إذا كان $T(x^\circ) = x^\circ$ فان البرهان تافه، لذلك نفرض أن $T(x^\circ) \neq x^\circ$ ونفرض أن:

$$T(Xn-1) = Xn \qquad n = 1, 2, \ldots..$$

إذا كان: $Xn^\circ = Xn^\circ+1$ لبعض $n^\circ \in N$ فانه واضح جداً ان Xn° نقطة ثابتة في T $(T(xn^\circ) = Xn^\circ)$ لذلك نفرض أن $Xn \neq Xn+1$ لكل $n \in N$.

الآن، بما أن $X^\circ \le T(x^\circ)$ و T دالة غير متناقصة لذلك سوف نحصل على أن:

$$x^\circ \le x1 \le x2 \le \ldots\ldots \le xn \le xn+1 \;.$$

بما ان $xn-1 \le xn$ وباستخدام (1) نحصل على:

$$P(xn+1,xn) = P(T(xn), T(xn-1))$$
$$\leq P(xn, xn-1) - \varnothing (P(xn, xn-1))$$
$$< P(xn, xn-1)$$

الآن سوف يكون لدينا متتابعة Pn حيث أن: $Pn = \{P(xn+1, xn)\}$ متتابعة غير سالبة وغير متزايدة بالتالي فانها تمتلك غاية P.

إذا كان $P > 0$ من الشرط (2) من تعريف $\varnothing$ فانه يوجد $n° \in N$ لكل $n > n°$ بحيث أن:

$$\varnothing(Pn) \geq \varnothing (P) > 0$$

بالإضافة إلى أن:

$$Pn \leq Pn-1 - \varnothing (Pn-1) \leq Pn-1 - \varnothing (P)$$

بأخذ الغاية لـ $n \longrightarrow \infty$ نحصل على:

$$P \leq P - \varnothing (P) \leq P - \varnothing (P) < P$$
$$\therefore\ P < P\ C\ !$$

بالتالي فأن $P = 0$. (Vasile I. Istratescu: 1981)

الآن لنبرهن أن $\{xn\}$ متتابعة كوشيه

من جهة أخرى بما أن $\lim P (xn, xn-1) = 0$

من الشرط (3) من تعريف $\varnothing$ فانه يوجد $0 < a < 1$ و $n° \in N$ لكل $n > n°$ بحيث أن:

$$\varnothing (P (xn, xn+1)) \geq a\ P(xn, xn-1)$$

الآن سوف يكون لدينا:

$$P(xn+1, xn) \leq P(xn, xn-1) - \varnothing (P(xn, xn+1))$$
$$\leq P(xn, xn-1) - a\ P(xn, xn-1)$$
$$= (1 - a)\ P(xn, xn-1)$$

$$\therefore P(xn+1, xn) \leq (1 - a)\ P(xn, xn-1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$ (Andrzej:2003)

من المتباينة (2) نحصل على:

$$P(xn+1, xn) \leq (1 - a)\ P(xn, xn-1) \leq \ldots.. \leq (1 - a)n\ P(x1, x°)\ \ldots\ldots\ldots..(3)$$

لتكن $(1 - a) = \lambda$ بالتالي فأن:

$$Ps(xn+1, xn) = 2P(xn+1, xn) - P(xn+1, xn+1) - P(xn, xn)$$
$$\leq 2P(xn+1, xn) + P(xn+1, xn+1) + P(xn, xn)$$
$$\leq 2P(xn+1, xn) + P(xn+1, xn) + P(xn, xn)$$
$$= 4P(xn+1, xn) = 4\ \lambda n\ P(x1, x°)1$$
$$\therefore\ Ps(xn+1, xn) \leq 4\lambda n\ P(x1, x°)$$

الآن:

$$P^s(xn+k, xn) \leq P^s\ (xn+k, xn+k-1) + \ldots\ldots. + P^s\ (xn+1, xn)$$
$$\leq 4\ \lambda n+k+1\ P(x1, x°) + \ldots\ldots.. + 4\lambda n\ P(x1, x°)$$
$$= 4\frac{\lambda^n(1-\lambda^k)}{1-\lambda}P(x_1, x_\circ)$$

$$\leq 4\frac{\lambda^n}{1-\lambda}P(x_1, x_\circ)$$

هذا يعني أن {xn} متتابعة كوشيه في الفضاء المتري (x, ps) وبما أن الفضاء المتري الجزئي (x,p) تام بالتالي حسب الملاحظة (3 :6) المتتابعة{xn} متقاربة في الفضاء المتري (x,ps) إلى النقطة x بمعنى:

$$\lim_{n\to\infty} P^s(x_n, x) = 0$$

لبعض $x \in x.$

وبموجب الملاحظة(3: 6) سوف نحصل على:

$$P(x,x) = \lim_{n\to\infty} P(xn,x) = \lim_{n\to\infty,\ m\to\infty} P(xn, xm) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وبما ان{xn} متتابعة كوشيه في الفضاء المتري (x, ps) سوف نحصل على:

$$\operatorname{Lim} Ps(xn, xm) = 0$$

ومن المتباينة (3) نحصل على:

$$\operatorname{Lim} P(xn, xn) = 0 \quad \text{and} \quad n \to \infty$$

وبالتالي من تعريف Ps نحصل على:

$$\operatorname{Lim}_{n,m\to\infty} P(xn, xm) = 0$$

ومن المتباينة (4) نحصل على:

$$P(x,x) = \lim_{n\to\infty} P(xn,x) = \lim_{n,m\to\infty} P(xn, xm) = 0$$

الآن سوف نبرهن أن T(x) = x

نفرض أن 0 < P(x, T(x)) وبما أن T دالة مستمرة هذا يعني لكل 0 < ∈ يوجد S>0 بحيث أن:

$$T(Bp(x,s)) \leq Bp\ (T(x),\in)$$

$$\because P(x,x) = \lim P(xn, x) = 0$$

هذا يعني يوجد K ∈ N بحيث أن:

$$P(x_n, x) < P(x, x) + S \forall n \geq k$$

لذلك Bp(x,s) ∋ xn لكل n ≥ k بالتالي فان:

$$T(x_n) \in T(B_p(x,s)) \subseteq B_p(T(\infty), \in)$$

أي أن:

$$P(T(x_n), T(x)) < P(T(x), T(x)) + \in \forall n \geq k$$

بالتالي فأن:

$$\lim P(x_{n+1}, T(x)) = P(T(x), T(x))$$

الآن:

$$P(x,T(x)) \le P(x,x_{n+1}) + P(x_{n+1},T(x)) - P(x_{n+1},x_{n+1})$$
$$P(x,T(x)) \le P(x,x_{n+1}) + P(x_{n+1},T(x))$$

بأخذ ∞ ⟵ n وباستخدام (1) نحصل على:

$$P(x,T(x)) \le P(T(x),T(x) \le P(x,x) - \phi(P(x,x)) = 0$$

وبالتالي فأن:

$$P(x,T(x)) = 0 \Rightarrow T(x) = x$$

في المبرهنة التالية، سوف نرفع استمرارية الدالة T ونحاول الحصول على النقطة الثابتة x تحت الدالة:
T (T(x) = x)

مبرهنة (3: 9) :

إذا كانت (x, ≤) مجموعة مرتبة جزئياً، وليكن P فضاء متري جزئي على x، حيث ان (x,p) فضاء متري جزئي تام،
ولتكن x ⟵ T: x دالة غير متناقصة تحقق الشرط التالي:

$$P(T(x),T(y)) \le P(x,y) - \phi(P(x,y)) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

لكل x ∈ x, y حيث أن y,x ⟵ عنصران قابلين للمقارنة ψ ∈ ∅.
كذلك الشرط التالي متحقق، حيث انه إذا كانت{xn} متتابعة متزايدة متقاربة إلى x∈X فأن:

$Xn \le x$ لكل $n \in N$

بالتالي فأنه إذا وجد X ∋ x° بحيث أن $x^\circ \le T(x^\circ)$ فانه يوجد x∈X بحيث ان T(x)= x، اكثر من ذلك
فان: P(x,x)= 0

البرهان:

كما في المبرهنة (3−9) : نحاول الحصول على المتتابعة{xn} في x ونعرف الدالة xn=(xn+1) بحيث أن:

$$x_\circ \le x_1 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$$

وبنفس الخطوات السابقة في المبرهنة (3−1) نحصل على أن{xn} متتابعة كوشيه في الفضاء المتري (x,ps) بالتالي فانه
يوجد X ∋ x بحيث أن:

$$P(x,x) = \lim_{n\to\infty} P(xn,x) = \lim_{n,m\to\infty} P(xn, xm) = 0$$

بقي الآن أن نبرهن أن T(x) = x
نفرض أن: P(x,T(x)) > 0
وبواسطة شرط المبرهنة (5) نحصل على:

$$P(x,T(x)) \le P(x,x_{n+1}) + P(x_{n+1},T(x)) - P(x_{n+1},x_{n+1})$$
$$P(x,T(x)) \le P(x,x_{n+1}) + P(T(x_n),T(x))$$
$$P(x \le x_{n+1})) + P(x_n,x) + -\phi(P(x_n,x))$$

بأخذ ∞ ⟵ n نحصل على أن:

$$P(x,T(x)) = 0 \Rightarrow T(x) = x$$

الآن سوف نعطي الشرط الكافي لوحدانية النقطة الثابتة في **المبرهنة (3−1) و(3−2):**

((لكل x ∈ x,y يوجد x ∈ z بحيث ان z تكون قابلة للمقارنة مع x أو y))..................... (6)

مبرهنة(3: 10) :

(بإضافة الشرط (6) إلى المبرهنة (3−1) و(3−2) نحصل على وحدانية النقطة الثابتة للدالة T).

البرهان:

نفرض أن z, y ∈ X حيث أن T(z)=z و T(y) =y وz≠y(نقاط ثابتة للدالة T مختلفة) بالتالي فأن P(z,y) > (z≠ y) 0. (Vasile I. Istratescu: 1981)

الآن سوف يكون لدينا احتمالين:

(1) إذا كان y,z قابلين للمقارنة فأن Tn(z) = z و Tn(y) = y قابلين للمقارنة لكل n=0,...

وباستخدام الشرط (1):

$$P(z,y)=P\left(T^{n}(z),T^{n}(y)\right)\leq P\left(T^{n-1}(z),T^{n-1}(y)\right)-\phi\left(P(T^{n-1}(z),T^{n-1}(y)\right)$$

$$P(z,y)=P(z,y)-\phi(P(z,y))$$

$$P(z,y)<P(z,y)C!$$

(2) إذا كان y,z غير قابلين للمقارنة، فانه يوجد X ∋ x بحيث أن X ∋ x قابل للمقارنة لـ y,z.

وبما أن T غير متناقصة بالتالي فأن Tn(x) قابلة للمقارنة لـz = Tn(z) و y = Tn(y) لكل n=0,1,... أكثر من ذلك فأن:

$$P\left(z,T^{n}(x)\right)=P\left(T^{n}(z),T^{n}(x)\right)$$

$$P\left(z,T^{n}(x)\right)\leq P\left(T^{n-1}(z),T^{n-1}(x)\right)-\phi\left(P(T^{n-1}(z),T^{n-1}(x)\right)$$

$$P\left(z,T^{n}(x)\right)=P\left(z,T^{n-1}(x)\right)-\phi\left(P(z,T^{n-1}(x)\right)$$

$$P\left(z,T^{n}(x)\right)<P\left(z,T^{n-1}(x)\right)$$

بالتالي فأن P(z, Tn(x)) متتابعة موجبة غير متناقصة بالتالي فأنها متقاربة ونقطة تقاربها $\alpha \geq 0$ ومن المتباينة الأخيرة نحصل على:

$$\alpha\leq\alpha-\phi(\alpha)<\alpha$$

بالتالي فأن $\alpha = 0$

P (z,Tn(x)) = 0

وبنفس الطريقة نحصل على أن: P(y, Tn(x)) = 0 أخيراً:

$$P(z,y)\leq P\left(z,T^{n}(x)\right)+P\left(T^{n}(x),y\right)-P\left(T^{n}(x),T^{n}(x)\right)$$

$$P(z,y)\leq P\left(z,T^{n}(x)\right)+P\left(T^{n}(x),y\right)$$

وبأخذ ∞ ⟵ n نحصل على أن P(z,y) = 0

وهذا تناقض لكون P(z,y)>0 (z≠y) بالفرض z = y

مثال(3: 11) : لتكن x=[0,∞+]، فأن (x, ≤) مجموعة مرتبة جزئياً مع الترتيب الطبيعي للأعداد الحقيقية نعرف:

P: XxX ⟶ R

بالشكل $P(x,y) = \max\{x,y\}$ بالتالي فأن (x,p) فضاء متري جزئي تام.

نعرف الدالة: $T: X \longrightarrow X$

$$T(x) = \begin{cases} 0 \; if \; 0 \le x < 1 \\ \dfrac{x+1}{3} \; if x \ge 1 \end{cases}$$

بالتالي فأن الدالة T غير متناقصة نعرف $\varnothing : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ بالشكل:

$$\phi(t) = \frac{1}{3}t$$ لكل $t \in [0, \infty)$

من السهولة إثبات أن $\varnothing$ تحقق شروط التعريف (تعريف$\varnothing$)

باستخدام المتباينة (1) للمبرهنة(3: 10) نحصل على الاحتمالات التالية: (Vasile I. Istratescu: 1981)

(1) إذا كان $x,y \ge 1$ و $x \le y$ فأن

$$P(T(x),T(y)) = P\left(\frac{x+1}{3},\frac{y+1}{3}\right)$$ (لأن الدالة غير متناقصة)

$$P(T(x),T(y)) = \frac{y+1}{3}$$

$$P(T(x),T(y)) \le \frac{x+y}{3} \le \frac{2}{3}\max\{x,y\}$$

$$P(T(x),T(y)) = \max\{x,y\} - \frac{1}{3}\max\{x,y\}$$

$$P(T(x),T(y)) = P(x,y) - \phi(P(x,y))$$

(2) إذا كان $x\in[0,1)$ و $y\ge1$ و $x<y$ فأن:

$$P(T(x),T(y)) = P\left(0,\frac{y+1}{3}\right) = \frac{y+1}{3} \le \frac{2}{3}y$$

$$P(T(x),T(y)) = \max\{x,y\} - \frac{1}{3}\max\{x,y\}$$

$$P(T(x),T(y)) = P(x,y) - \phi(P(x,y))$$

(3) إذا كان $x,y \in [0,1)$ وكان $x \le y$ فأن:

$P(T(x), T(y)) = 0$ هذا واضح بأن المتباينة (1) للمبرهنة (12-3)

من أعلاه نحصل على أن T تحقق كل شروط المبرهنة (3-1) بالتالي فأن $x = 0$ هي النقطة الثابتة الوحيدة.

الخاتمة:

ان البعد الصفري المنفصل قابل للاحتساب في فضاءات مترية معينة. ويقال عن فضاء متري (X, d) أنه كامل إذا توفرت أحدي هذه الشروط المتكافئة الواحدة منهن مع الأخريات: لكل متتالية لكوشي مكونة من نقط تنتمي إلى مجموعة X، نهاية تنتمي هي الأخرى إلى نفس المجموعة X. كل متتالية لكوشي معرفة في X مجموعة تتقارب في X (أي أنها تتقارب من نقطة ما من X).

وكذلك يهدف هذا البحث الى دراسة مفاهيم الإغلاق ونقاط النهاية وحدود المجموعة في الفضاءات المترية المبهمة. اتبع البحث المنهج التجريبي وتقديم وعرض بعض الخصائص الطوبولوجية ومفاهيم البعد الصفري، وتناول الثاني تحديد البعد الاستقرائي الصغير في الفضاء المتري المبهم.

References:

- Al Aloosi, Ahmed Noori. The mathematical module for the temporal structures using Fauker – Blanc equation. Journal of the university researcher for the humanistic sciences. Issuse (7). (20024) https://ar-ar.facebook.com/
- AlAni, Attallah Thamir. The general basics of typology. The author William Terfin. hdniq4@npaid.org
- Andrzej Granas and James Dugundji, Fixed Point Theory (2003) Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-00173-5. Email addresses: masiha@kntu.ac.ir
- Gajic, L. "On Ultra Metric Space", Nori Sad J. Math, 2001. tirabGajic33117@avastu.com
- Kishore, G.N. and Rao, K. P., "Common Fixed Paut "Theorems in ultra metric spaces", Journal of mathematics (2008) Kishore @salesforce.com .
- Masiha, H.P., Sabetghadam, F. and Shahzad, N. ((Fixed point theorems in partial metric spaces with an application)), published by Faeutly of science and mathematics, Filomat 27 (617 – 624) (2013). Email addresses: masiha@kntu.ac.ir
- Naom, Ghassan Adel. An Introduction in Mathematics analysis. Directorate of Mosul University Press. Ministry of Higher Education and Scientific Research. 1986. www.facebook.com/mathscuob/posts
- Ramadan, Ahmed Adulqadir, Taha Mursi Aladawi. General Typology. College of Sciences. King Saud University – Alqassim Branch. https://www.noor-book.com
- Vasile I. Istratescu, Fixed Point Theory, An Introduction, D. Reidel, the Netherlands (1981). ISBN 90-277-1224-7. www.researchgate.net/publication
- William A. Kirk and Brailey Sims, Handbook of Metric Fixed Point Theory (2001), Kluwer Academic, London ISBN 0-7923-7073-2
- https://press-files.anu.edu.au/downloads/press/n2179/pdf
- William,R.and Philip,W.,"Introduction to Mathematical anay lsis," MC Graw-Hill,Inc(1987). hehabotwilliam988@hutov.com